

Die Σ -Notation

Bsp 1) $\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$$\sum_{k \in \{1,3,5\}} k^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2$$

2) $\sum_{j=-2}^2 3^j = 3^{-2} + 3^{-1} + 3^0 + 3^1 + 3^2$

$$= \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} + 1 + 3 + 3^2$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + 3 + 9$$

Arithmetische Folgen

kleiner Gauß: $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$

arithm. Folge = Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$
mit konstanter Differenz $a_{k+1} - a_k = a$

Bsp $1, 2, 3, 4, \dots$ Diff = 1
 $3, 8, 13, 18, \dots$ Diff = 5

$$\begin{array}{rcl} + & 1 + 2 + 3 + \dots & + 99 + 100 = S \\ + & 100 + 99 + 98 + \dots & + 2 + 1 = S \\ \hline & 101 + 101 + 101 + \dots & + 101 + 101 = 2S \end{array}$$

$$\Rightarrow 2S = 100 \cdot 101 \quad \Rightarrow S = \frac{1}{2} 100 \cdot 101 = 50 \cdot 101 = 5050$$

Wir suchen eine Formel für die Summe der arithm. Folge

$$\begin{array}{r}
 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = S \\
 a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 = S \\
 \hline
 (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = 2S
 \end{array}$$

$$* \quad a_2 + a_{n-1} = (a_1 + q) + (a_n - q) = a_1 + a_n$$

$$\Rightarrow 2S = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2} n (a_1 + a_n)}$$

► Geometrische Folgen / Reihe

= Folge $a_0, a_1, a_2, \dots$ sodass für jedes n gilt $a_{n+1} = a_n \cdot r$ (für ein festes r)

Bsp $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

$$a_0 = 1, r = 2$$

$$3, 6, 12, 24, 48, \dots$$

$$a_0 = 3, r = 2$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$a_0 = 1, r = \frac{1}{2}$$

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

$$a_0 = a, r = r$$

Summe der ersten $n+1$ Folgenglieder einer geom. Folge ist

$$\sum_{k=0}^n ar^k (= a + ar + ar^2 + \dots + ar^n) = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} \quad r \neq 1$$

Bew $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + ar^{n+1}$
 $r \cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n + ar^{n+1}$

$$S_n - r \cdot S_n = a - ar + ar - ar^2 + ar^2 - ar^3 + \dots + ar^n - ar^n + ar^n - ar^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n(1-r) = a(1-r^{n+1})$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

□

Ist $-1 < r < 1$, so $r^n \rightarrow 0$ bei $n \rightarrow \infty$

Bsp $r = 0,95$, $r^{100} \approx 0,00592$
 $r^{1000} \approx 0,00592 \cdot 10^{-22}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad (\text{symbolisch})$$

Für $-1 < r < 1$ ist die unendliche Summe
 (die geom. Reihe)

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n ar^k$$

Bsp 1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$
 $a=1, r=\frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$

2) $a = \frac{1}{2}, r = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{\overset{10}{\left(\frac{1}{2}\right)}}{1 - \underset{r}{\left(-\frac{1}{2}\right)}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Bsp (periodische Dezimalzahlen)

$$0,\overline{3} = 0,3333\dots = \underset{\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow}{\frac{3}{10}} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{\left(\frac{3}{10}\right)}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\left(\frac{3}{10}\right)}{\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

► Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \quad r > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad -1 < r < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \text{ für } r = -1 \text{ existiert nicht}$$

$-1, 1, -1, 1, -1, 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \infty \quad \text{für } p > 0$$

$1^p = 1, 2^p, 3^p, 4^p, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad p > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1 \quad p > 0$$

Bsp (Quotienten)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 + 4n + 9}$$

teile Zähler und Nenner
durch die höchste Potenz

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{u^2} (2u^2 - 3u + 4)}{\frac{1}{u^2} (3u^2 + 4u + 9)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2 - 3\left(\frac{1}{u}\right) + 4\left(\frac{1}{u^2}\right)}{3 + 4\left(\frac{1}{u}\right) + 9\left(\frac{1}{u^2}\right)}$$

$\frac{1}{u} \rightarrow 0$ $\frac{1}{u^2} \rightarrow 0$ $\frac{1}{u} \rightarrow 0$ $\frac{1}{u^2} \rightarrow 0$

$$= \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3}$$

Wachstumsraten von Folgen

$\underbrace{n \cdot n \cdot n \dots n}_{p \text{ mal}} = n^p$ wächst langsamer als

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ mal}} = a^n \quad (a > 1)$ ————— " $\ll$ " —————

$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$ ————— " $\ll$ " —————

$\underbrace{n \cdot n \dots n}_{n \text{ mal}} = n^n$

Regel $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{"langsam"}}{\text{"schnell"}} = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{"schnell"}}{\text{"langsam"}} = \infty$

Bsp $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3^n} = \left[\frac{\text{langsam}}{\text{schnell}} \right] = 0$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3^n + 1} = \left[\begin{array}{l} \text{teile Z. und N.} \\ \text{durch die schnellste Folge} \end{array} \right]$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^n} (2^n + 1)}{\frac{1}{3^n} (3^n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{3^n} \right)}{\left(\frac{3^n}{3^n} + \frac{1}{3^n} \right)}$

hier 3^n

$$= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\overset{0}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} + \overset{0}{\left(\frac{1}{3^n}\right)}}{1 + \left(\frac{1}{3^n}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$